

# 画像列の遷移行列のブロック対角化による 部分空間を用いた物体の姿勢推定

玉木 徹<sup>†</sup> 天野 敏之<sup>††</sup> 金田 和文<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 広島大学大学院工学研究科情報工学専攻 〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1

<sup>††</sup> 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 〒630-0101 奈良県生駒市高山町 8916 番地の 5

E-mail: <sup>†</sup>{tamaki,kin}@hiroshima-u.ac.jp, <sup>††</sup>amano@is.naist.jp

あらまし 本論文では、3次元で1軸回転する物体の画像列を表現する遷移行列のブロック対角化を用いて部分空間を構成し、それを用いて物体の姿勢を推定する手法を提案する。提案手法は、部分空間において基準画像とブロック対角行列の累乗の積とのユークリッド距離を最小にする冪指数を姿勢パラメータとして探索する。また、2次元部分空間における基準画像中の2次元ベクトルとのなす角を姿勢パラメータとして直接推定する手法も示す。実画像における実験において、推定誤差は最大で約4[deg]、平均で1.23[deg]という精度であり、提案手法が有効に働くことを示す。  
キーワード 姿勢推定, 巡回群, 遷移行列, ブロック対角化, 線形写像, 固有空間, 部分空間, パラメトリック固有空間法

## On a pose estimation in a subspace with block diagonalization of cyclic transient matrix of an image sequence

Toru TAMAKI<sup>†</sup>, Toshiyuki AMANO<sup>††</sup>, and Kazufumi KANEDA<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hiroshima University  
1-4-1 Kagamiyama, Higashi-hiroshima, Hiroshima, 739-8527 Japan

<sup>††</sup> Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology  
8916-5 Takayama, Ikoma, Nara, 630-0192 Japan

E-mail: <sup>†</sup>{tamaki,kin}@hiroshima-u.ac.jp, <sup>††</sup>amano@is.naist.jp

**Abstract** This paper proposes a new method for estimation of pose of a 3D object rotating about an axis by using a subspace with block diagonalization of a cyclic transient matrix of the image sequence of the object. The proposed method searches the pose parameter with the distance between an image and the standard image multiplied with a block diagonal matrix in the subspace. Alternative method that directly estimates the pose parameter as an angle subtended by two vectors in two-dimensional subspace. Experimental results with a real image sequence demonstrate that the maximum estimation error is about 4[deg], and 1.23[deg] in average, which show the effectiveness of the proposed method.

**Key words** pose estimation, cyclic group, transient matrix, block diagonalization, linear map, eigenspace, subspace, parametric eigenspace

### 1. はじめに

画像に写る物体の姿勢パラメータを推定する問題はコンピュータビジョンの重要な問題の一つであり、これまでに多くの研究がなされている。その多くは既知形状の剛体を仮定し、運動や投影の解析的モデルを採用して最適化問題を解く3次元幾何を用いたもの[1]である。それに対して、物体の形状や3次元空間での投影といった幾何学的な撮像過程を仮定せず、物体の見た目である画像そのものを学習する見えに基づく (appearance-based,

view-based) 手法が数多く提案されている。

見えに基づく姿勢推定手法として、村瀬ら[2],[3]はパラメトリック固有空間法を提案した。これは、連続的にパラメータが変化する画像列の固有空間を学習し、その画像列が固有空間中に描く軌跡(多様体)をスプラインで表現し、それをパラメータと共に保存して、新たな画像の姿勢の推定はそのスプライン上のパラメータを探索することで行う手法である。この手法はさまざまな場面に応用され、その有効性が示されている。しかし手法的に問題となるのは、スプライン表現を多自由度に拡張

することが困難であること、スプライン表現上でのパラメータ推定が closed-form ではなく反復計算が必要であることなどがある。また、連続変化する画像列の固有空間はどのようなものであるのかの解析がなされていない。

特殊な場合についての固有空間の解析結果はいくつか得られている。Uenohara ら [4], [5] は、カメラの光軸回り（つまり 2 次元平面）に回転する画像列の固有空間を効率的に求める手法を提案した。彼らはこの画像列が作る共分散行列が symmetric periodic Toeplitz 行列であり、その固有ベクトルは極座標系における周波数の異なる  $\cos$  であることを示した。したがって特異値分解 (SVD) を用いず、離散コサイン変換 (DCT) を用いることで固有ベクトルが効率的に計算できると述べている。実際には DCT ではなく、複素離散フーリエ変換 (DFT) または離散ハートレイ変換 (DHT) であることが、後に Park [6] によって指摘されている。Chang ら [7] は、2 次元平面での回転だけでなく並進の場合も、共分散行列が circulant 行列になり、したがってどちらも同じ固有空間を作る（つまり複素フーリエ基底で張られる）ことを示した。Jorgan ら [5], [8] は Uenohara ら [4] の結果を拡張し、回転する物体の画像列を複数用いた場合、共分散行列がブロック毎に circulant 行列になることを利用して、効率的な固有空間の生成方法を提案した。Sengel ら [9] は、Jorgan ら [8] の手法で画像の枚数が無限に得られたときの極限について考察し、姿勢パラメータを直接  $\tan$  で求める手法を提案した。

カメラの光軸回りでない、一般の 3 次元空間中の 1 軸回転の場合はそう簡単ではない。Chang ら [7] は、白黒の円筒が 3 次元空間で 1 軸回転する単純な画像を生成し、2 次元平面回転と同様の処理を行い、その基底は  $\cos$  に似ているということを観察している。Sengel ら [9] は、3 次元の回転による見えの変化を複数の異なる 2 次元画像として扱い、2 次元回転と同時に姿勢を推定しているが、3 次元の連続した回転パラメータは得られない。

見えが基本的に変化しない 2 次元回転の場合と異なり、3 次元回転の場合には物体の形状や表面特性に依存するため、固有ベクトルを解析的に決定することは不可能である。そこで、異なるアプローチから 3 次元 1 軸回転の姿勢推定手法を提案したのは Okatani ら [10] である。彼らの手法は、画像とその姿勢パラメータを線形写像（つまり行列）で結びつけ、その行列を一般化逆行列により取得し、新たな画像の姿勢を線形計算で得るという、線形回帰を応用したものである。天野ら [11], [12] は、固有空間による次元削減を考慮した一般化逆行列とみなすことができる BPLP [13] を用いて、Okatani らと同様に線形で姿勢を推定する手法を提案した。安藤ら [14] は線形回帰ではなく SVM 回帰を用いて 3 軸回転する物体の画像とパラメータの学習を行っている。しかし、画像の枚数が画素数よりも少ないという条件では線形手法で十分であることが玉木ら [15] によって指摘されており、この条件は一般的に十分現実的なものである。

本論文では、新しい 3 次元 1 軸回転の姿勢推定を線形で行う手法を提案する。前述したように、従来は 2 次元回転に対しては固有ベクトル自体を解析的に得ようとする試みがなされてき

た。そして 3 次元 1 軸回転では、手法の主要な点が、固有ベクトル自体ではなく、画像とパラメータの線形写像（線形作用素）に移ってきた。本論文で提案する手法は、この写像に着目する。さらに、画像とパラメータの写像ではなく、連続して変化するパラメータに付随して連続的に変化する画像列中の、画像と画像を結びつける写像を考察の対象とする。提案する手法では、この写像を行列で表し、ブロック対角化することで得られる部分空間が姿勢推定に有用な表現となることを利用する [16], [17]。

## 2. 画像の遷移を表す行列のブロック対角化

ここでは、 $n$  枚の画像  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  が与えられたとき、行列によって画像間の関係を表す [16]。

### 2.1 画像の遷移を表す行列とその複素対角化

ある物体を 3 次元の 1 軸で等間隔に回転させて撮影した  $n$  枚の画像  $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jN})^T$  を  $N$  次元ベクトルとし、その画像を撮影した角度を  $\theta_j = 2j\pi/n$  とする。ここで  $j = 0, 1, \dots, n-1$  である。さらに実際の状況として  $N > n$ 、つまり画素数は画像数より大きいことを仮定する。

まず画像  $x_j$  を  $x_{j+1}$  へと遷移させるような、物体の 1 軸回転の 1 ステップ分に相当する以下のような線形変換  $G$  を考える。

$$x_{j+1} = Gx_j, \quad x_j = G^j x_0, \quad G^n = I_n \quad (1)$$

ここで  $I_n$  は  $n \times n$  単位行列である。画像列に対してはこの変換式を行列で書くことができる。

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで上式を

$$X_1 = GX_0 \quad (3)$$

とおくと、最小ノルム型一般化逆行列 [18] を用いて

$$G = X_1(X_0^T X_0)^{-T} X_0^T \quad (4)$$

が得られる。

逆に、画像列  $X_0$  に右から作用する行列を考えると、 $X_0$  から  $X_1$  への変換は、以下のように単なる  $n \times n$  の列置換行列  $M$  で表現できる。

$$X_1 = X_0 \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = X_0 M \quad (5)$$

すると、式 (4) は以下のように書ける。

$$G = X_0 M (X_0^T X_0)^{-T} X_0^T \quad (6)$$

さらに、画像列  $X_0$  を特異値分解して  $X_0 = E \Sigma V^T$  とすると、式 (6) は

$$G = E \Sigma V^T M V \Sigma^{-1} E^T \quad (7)$$

と書き直せる。一方列置換行列  $M$  は、複素対角行列  $D'$  とユニタリ行列  $W'$  を用いて

$$M = W'^H D' W' \quad (8)$$

と対角化できる（付録 1. 参照）。ここで  $H$  は共役転置を表す。これを式 (7) に代入し、

$$G = E \Sigma V^T W'^H D' W' V \Sigma^{-1} E^T = U_2' D' U_1' \quad (9)$$

$$U_1' = W' V \Sigma^{-1} E^T, \quad U_2' = E \Sigma V^T W'^H \quad (10)$$

と書き表せる。

## 2.2 行列 $G$ のブロック対角行列を用いた分解

上述のように、行列  $G$  は実数または複素数の固有値を持ち、ユニタリ行列で対角行列に分解される<sup>(注1)</sup>。しかし、 $M$  の対角化において、複素数の固有値は必ず共役複素数が対で現れる。その共役複素固有値に対応する共役複素固有ベクトルを変換することで、 $M$  の実数行列によるブロック対角化が可能になる [6], [19]（付録 2. 参照）。

そこで、 $M$  のブロック対角行列  $D$  と実数行列  $W$  を用いて、 $G$  は以下のように分解できる。

$$G = U_2 D U_1 \quad (11)$$

$$U_1 = W V \Sigma^{-1} E^T, \quad U_2 = E \Sigma V^T W^T \quad (12)$$

ここで  $D$  は以下のような実ブロック対角行列である。

$$D = \begin{cases} \text{diag}(1, A_1, A_2, \dots, A_s), & n \text{ is odd} \\ \text{diag}(1, A_1, A_2, \dots, A_s, -1), & n \text{ is even} \end{cases} \quad (13)$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \quad (14)$$

また明らかに以下が成り立つ。

$$U_1 U_2 = I_n \quad (15)$$

## 2.3 行列 $G$ のブロック対角化が表す部分空間

前節までに示した  $G$  を対角化する行列  $U_1, U_2$  は、画像の姿勢を表す部分空間への投影と考えることができる [16], [17]。

$D$  における各ブロック  $A_k$  に対応する  $U_1$  の 2 つの行ベクトルは、画像空間からそれらが張る 2 次元部分空間への投影（線形写像）を表しており、各ブロックは重複していないため、各 2 次元部分空間は互いに直交している。そのため、画像の  $U_1$  による投影は、元の画像を別々の多数の 2 次元部分空間に投影し、それぞれの部分空間において 2 つの画素を各ブロック  $A_k$  によって  $\angle \zeta_n^k = \frac{2k\pi}{n}$  だけ回転させていることに相当する。

ここで  $G$  を式 (2) による画像  $x_j$  への作用を見てみる。

$$x_{j+1} = U_2 D U_1 x_j \quad (16)$$

$$U_1 x_{j+1} = D U_1 x_j \quad (17)$$

$$x'_{j+1} = D x'_j \quad (18)$$

ここで  $'$  は部分空間における画像を意味し、 $x'_j = U_1 x_j$  であ

る。したがって、行列  $U_1$  は、単に 1 つまたは 2 つの画素を独立に 2 次元平面上で回転させることで画像が  $x'_0, x'_1, \dots$  と次々に移りあうことができる多数の 2 次元部分空間への投影を実現している。

またすぐにわかるように、 $x_0$  から  $x_j$  への画像の遷移を、 $x_j = G^j x_0$  という大規模な行列  $G$  を用いた形ではなく、 $x_j = U_2 D^j U_1 x_0$  というコンパクトな行列の積により実現することができる。

## 3. 新しい画像の姿勢推定

本節では、前節で述べた部分空間を用いて、新たな画像  $x$  が与えられたときにその画像の姿勢パラメータ  $\theta$  を推定する手法について述べる。

### 3.1 部分空間中の距離による姿勢推定

前節の最後に述べたように、学習画像系列中の画像間の遷移は、行列  $G$  の累乗で表される。これはブロック対角行列  $D$  の累乗で表すことと同じであり、つまり  $D$  を何乗するかで画像の遷移を決定することができる。

これは、部分空間に投影した画像についても同じことが言える。つまり、 $x'_j = D^j x'_0$  である。そこでこの部分空間での画像遷移を利用して、新たな画像  $x$  の姿勢パラメータ  $\theta$  を以下のよう

$$j = \underset{j}{\operatorname{argmin}} \|x' - D^j x'_0\|^2 \quad (19)$$

$$\theta = j\theta_1 = \frac{2\pi}{n} j \quad (20)$$

これは部分空間におけるユークリッド距離を評価基準を用いているが、以下のように相関を最大にする基準と同値である（付録 3. 参照）。

$$j = \underset{j}{\operatorname{argmax}} x'^T x'_j \equiv \underset{j}{\operatorname{argmax}} x'^T D^j x'_0 \quad (21)$$

ここで、 $D$  の累乗は以下のように計算する。

$$D^j = \begin{cases} \text{diag}(1, A_1^j, A_2^j, \dots, A_s^j), & n \text{ is odd} \\ \text{diag}(1, A_1^j, A_2^j, \dots, A_s^j, (-1)^j), & n \text{ is even} \end{cases} \quad (22)$$

$$A_k^j = \begin{pmatrix} \cos j\theta_k & \sin j\theta_k \\ -\sin j\theta_k & \cos j\theta_k \end{pmatrix} \quad (23)$$

この推定は  $j$  についての全探索になるため、非常に計算コストがかかるように思われる。しかし、部分空間の性質を考慮すると、実際は効率のよいアルゴリズムを考えることができる。式 (19) で表される部分空間における距離を、実際のいくつかの画像について計算したものを図 1 に示す（詳細は実験の節を参照）。このグラフからわかるように、学習に用いた画像は対応する  $j$  の値で急激に落ち込む最小値をとる。学習に用いていない画像でも、対応する  $j$  の値の付近においてなだらかな最小値をとっている。そのため、まず粗く  $j$  を探索しておいて、その中で最小となるものの付近を細かく探索して最小値を探すことで、計算コストを減らし、任意の精度で最小値を求めることができる。

(注1):  $M$  の分解は対角化であるが、 $G$  の分解は  $U_1'$  と  $U_2'$  が正方行列ではないため、対角化とは呼べない。この節で述べる  $U_1$  と  $U_2$  による  $G$  の分解も同様である。ただし本論文では説明の簡便のためにこれらも対角化と呼ぶことにする。

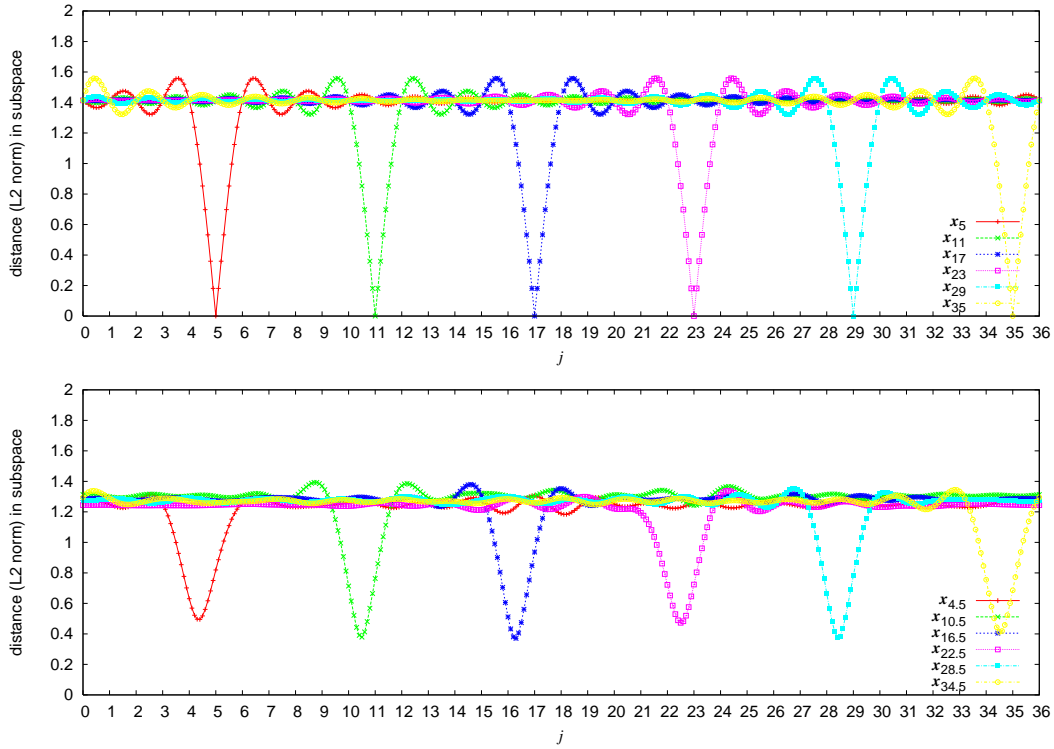


図1 部分空間における距離。横軸は  $D^j$  の冪指数  $j$ 。(上) 学習画像  $x_j (j = 5, 11, 17, 23, 29, 35)$  について、 $D^j x'_0$  との(部分空間における)ユークリッド距離  $\|x'_j - D^j x'_0\|^2$  を表す。これらの画像は学習に用いているため、対応する  $j$  において距離 0 となる。(下) 学習していない画像  $x_j (j = 4.5, 10.5, 16.5, 22.5, 28.5, 34.5)$  について、 $D^j x'_0$  との(部分空間における)ユークリッド距離を表す。

3.2 2次元部分空間でのベクトルのなす角による姿勢推定  
前述した距離による姿勢推定は、効率的なアルゴリズムがあるとしても、やはり探索が必要になる。そこで、ここでは探索を必要としない姿勢推定手法について述べる。

前節でも述べたように、画像は別々の多数の2次元部分空間へ  $U_1$  によって投影され、それぞれの部分空間において2つの画素が各ブロック  $A_k$  によってだけ回転されている。ここで特に  $A_1$  に対応する2画素のベクトルに注目する。学習した画像列で隣接する画像  $x_j, x_{j+1}$  は、部分空間に投影された場合、 $A_1$  に対応する2画素のベクトルは、角度  $\theta_1$  をなしていることになる。

そこで、この  $A_1$  に対応する2次元部分空間のみを用いて、2画素ベクトルがなす角を姿勢の推定値とする方法を提案する。すなわち、

$$x''_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x'_0 \in R^2 \quad (24)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x'_0 \quad (25)$$

$$x'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x' \in R^2 \quad (26)$$

$$\cos \theta = \frac{x''_0^T x''}{\|x''_0\| \|x''\|} \quad (27)$$

また

$$x''_0 = (x''_0^T, 0)^T, \quad x''' = (x''^T, 0)^T \in R^3 \quad (28)$$

$$(0, 0, \sin \theta)^T = \frac{x''' \times x''_0}{\|x''_0\| \|x''\|} \quad (29)$$

以上より

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \quad (30)$$

を、画像  $x$  の姿勢の推定値とする。

#### 4. 実験

これまでに述べた手法を用いて、実際の画像列における部分空間を構成し、姿勢推定を行った結果を示す。画像はCOIL-20 [20] の物体4(招き猫)を用いた。この画像のサイズは  $N = 128 \times 128$  であり、5度ずつ1軸回転した  $n = 72$  枚の画像サンプルからなる。手法の実装と実ブロック対角化の計算にはScilab-4.1を用いた。

72枚の学習サンプル画像のうち、奇数番号に対応する36枚(0, 10, 20, ... 度の画像)をそれぞれ  $x_0, x_1, \dots, x_{35}$  として学習に用いた(つまり  $U_1$  を計算した)。偶数番号に対応する残りの36枚(5, 15, 25, ... 度の画像)は学習には用いず、それぞれ  $x_{0.5}, x_{1.5}, \dots, x_{35.5}$  という画像として手法の評価に用いた。

まず部分空間の特性を見るために、学習に用いた画像  $x'$  と、部分空間において  $x'_0$  を  $D$  の累乗により回転した画像とのユークリッド距離を求めたものを図1(上)に示す。横軸は  $D^j$  の冪指数  $j$  で、縦軸は  $D^j x'_0$  との距離である。例えば画

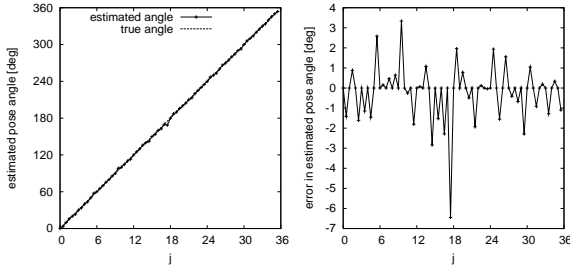


図 2 距離による姿勢推定結果。(左)画像  $x_j (j = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 35.5)$  の姿勢推定結果。(右)各画像の姿勢推定誤差。  
RMSE=1.7998525[deg]

像  $x_5$  との距離  $\|x'_5 - D^j x'_0\|^2$  は、 $j = 5$  において急激に落ち込む最小値をとっており、学習が適切に行われていることがわかる。また学習に用いた他の画像  $x_0, x_1, x_2, \dots$  に相当する  $D^0 x_0, D^1 x_0, D^2 x_0, \dots$  との距離は、すべて等距離であり、 $\sqrt{2}$  である<sup>(注2)</sup>。冪指数が実数の場合には等距離にはならず、その前後の整数の冪指数における  $\sqrt{2}$  を通過する、高調波(の絶対値を取ったもの)になっている。しかし  $\sqrt{2}$  からの差(リップル幅)は小さく、最小値の探索には問題ない。

一方学習に用いていない画像に対しても同様に距離を求めたものを図 1(下)に示す。未学習の画像であっても対応する冪指数  $j$  の値の付近においてなだらかな最小値をとっており、そのことからこの部分空間が姿勢推定に有効であるということがわかる。冪指数が対応しない値の場合、距離は大きくなるが、 $\sqrt{2}$  よりもやや小さい値付近に収まっており、最小値の探索に影響を与えることはない。

次に、学習していない画像を用いて、3.1 節で述べた部分空間中の最小距離を探索する手法で姿勢推定を行った結果を図 2 に示す。この図では学習に用いた画像 ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) に対しても姿勢推定を行っているが、その場合には正しい姿勢が誤差なく推定されている。学習していない画像 ( $j = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$ ) に対する姿勢推定は良好に行われている。最大誤差が 7[deg] 程度のもので除けば、推定誤差はほぼ  $\pm 2$ [deg] 程度に収まっており、二乗誤差平均の平方根 RMSE は 1.80[deg] である。

一方、図 3 に示すのは、3.2 節で述べた、2 次元部分空間中のベクトルのなす角を用いる手法で姿勢推定を行った結果である。最大誤差は 4[deg] 程度であり、RMSE は 1.23[deg] である。これは距離を用いた推定手法よりも精度がよく、期待したとおりベクトルのなす角が姿勢をよく表しているといえる。

## 5. おわりに

本論文では、新しい 3 次元 1 軸回転の姿勢推定を線形で行う二つの手法を提案した。提案手法は、画像と画像の遷移を表す写像を行列で表現しブロック対角化することで姿勢推定に有用な部分空間を構成し、その部分空間で新たな画像の姿勢を推定する。姿勢推定のために、部分空間におけるユークリッド距離を最小にする冪指数を探索する手法と、2 次元部分空間にお

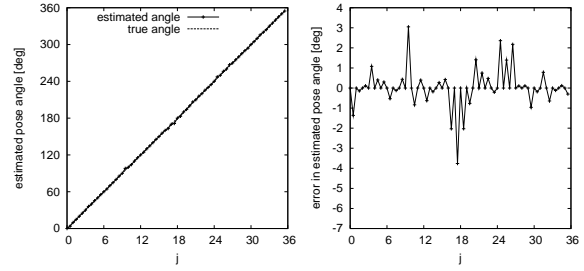


図 3 角度による姿勢推定結果。(左)画像  $x_j (j = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 35.5)$  の姿勢推定結果。(右)各画像の姿勢推定誤差。  
RMSE=1.233656[deg]

るベクトルのなす角を用いる手法を提案し、実画像においてそれらの推定精度を比較した。実験結果では、ベクトルのなす角を用いる推定手法のほうがやや精度が高いことを示した。

謝 辞

有益なコメントや議論をしていただいた広島大学工学研究科情報工学専攻市原由美子、広島大学大学院理学研究科数学専攻田丸博士の両氏に感謝致します。

## 付 録

### 1. 行列 $M$ の複素対角化

$n \times n$  列置換行列  $M$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

を対角化する [6] ~ [8], [19]。まず固有方程式は

$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda & & & -1 \\ -1 & \lambda & & \\ & -1 & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n - 1 \quad (\text{A.2})$$

であるので、固有値は  $n$  個の異なる 1 の原始  $n$  乗根  $\zeta_n$  である。

$$\lambda_k = \sqrt[n]{1} = \zeta_n^k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

ここで  $i = \sqrt{-1}$  である。 $\zeta_n^k$  に対応する固有ベクトルを  $w_k = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  とすると、

$$M w_k = \zeta_n^k w_k = (w_n, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})^T \quad (\text{A.4})$$

$$= (\zeta_n^k w_1, \zeta_n^k w_2, \dots, \zeta_n^k w_n)^T \quad (\text{A.5})$$

よって

$$w_k = (\zeta_n^{(n-1)k}, \dots, \zeta_n^{2k}, \zeta_n^k, 1)^T \quad (\text{A.6})$$

以上より  $M$  は以下のように対角化される。

$$M = W'^H D' W' \quad (\text{A.7})$$

$$D' = \text{diag}(1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}) \quad (\text{A.8})$$

$$W' = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \quad (\text{A.9})$$

(注2): 証明は簡単であり省略する。

## 2. 行列 $M$ のブロック対角化

$n$  次正方行列  $M$  をブロック対角化する [6], [7], [19].

$M$  の固有値  $\zeta_n^k$  と  $\zeta_n^{n-k}$  は共役複素である。それらに対応する共役複素固有ベクトル  $\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{n-k}$  を以下のように実部と虚部に分ける。

$$\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_k + i\mathbf{s}_k), \quad \mathbf{w}_{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_k - i\mathbf{s}_k) \quad (\text{A}\cdot 10)$$

ここで

$$\mathbf{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{n-k}), \quad \mathbf{s}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{n-k}) \quad (\text{A}\cdot 11)$$

である。すると、

$$M(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{n-k}) = (\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{n-k}) \begin{pmatrix} \zeta_n^k & 0 \\ 0 & \zeta_n^{n-k} \end{pmatrix} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

を変形して

$$M(\mathbf{c}_k, \mathbf{s}_k) = (\mathbf{c}_k, \mathbf{s}_k) \begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \quad (\text{A}\cdot 13)$$

$$= (\mathbf{c}_k, \mathbf{s}_k) A_k \quad (\text{A}\cdot 14)$$

が得られる。ここで  $\zeta_n^k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$  である。

したがって、 $M$  は以下のように実数でブロック対角化される。

$$M = W^T D W \quad (\text{A}\cdot 15)$$

ただし  $n$  が奇数のとき：

$$D = \text{diag}(1, A_1, A_2, \dots, A_s) \quad (\text{A}\cdot 16)$$

$$W = (\mathbf{w}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{c}_s, \mathbf{s}_s) \quad (\text{A}\cdot 17)$$

$$s = \frac{n-1}{2} \quad (\text{A}\cdot 18)$$

$n$  が偶数のとき：

$$D = \text{diag}(1, A_1, A_2, \dots, A_s, -1) \quad (\text{A}\cdot 19)$$

$$W = (\mathbf{w}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{c}_s, \mathbf{s}_s, \mathbf{w}_{n/2}) \quad (\text{A}\cdot 20)$$

$$s = \frac{n-2}{2} \quad (\text{A}\cdot 21)$$

Park [6] が指摘しているように、共役複素固有ベクトルの実数化は唯一ではない。上記の実数化は DFT によるものであり、DHT による実数化 [6] も可能である。

## 3. 部分空間における姿勢推定の評価基準

部分空間における姿勢推定のための以下の評価基準は、相関と一致することを示す。

$$F_j = \|\mathbf{x}' - D^j \mathbf{x}'_0\|^2 \quad (\text{A}\cdot 22)$$

ここでブロック  $A_s$  に対応する  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'_0$  の画素をそれぞれ  $\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_{0s}$  とすると、

$$F_j = \sum_s \|\mathbf{y}_s - A_s^j \mathbf{y}_{0s}\|^2 \quad (\text{A}\cdot 23)$$

$$= \sum_s (\|\mathbf{y}_s\|^2 + \|\mathbf{y}_{0s}\|^2 - 2\mathbf{y}_s^T A_s^j \mathbf{y}_{0s}) \quad (\text{A}\cdot 24)$$

$$= \|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}'_0\|^2 - 2\mathbf{x}'^T D^j \mathbf{x}'_0 \quad (\text{A}\cdot 25)$$

したがって

$$\underset{j}{\operatorname{argmin}} F_j \Leftrightarrow \underset{j}{\operatorname{argmax}} \mathbf{x}'^T D^j \mathbf{x}'_0 \quad (\text{A}\cdot 26)$$

- [1] Lowe, D. G.: Fitting Parameterized Three-Dimensional Models to Images, *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 13, No. 5, pp. 441–450 (1991), online.
- [2] 村瀬洋, シュリーナイヤー：2 次元照合による 3 次元物体認識パラメトリック固有空間法, 電子情報通信学会論文誌 DII, Vol. J77-D2, No. 11, pp. 2179–2187 (1994), online.
- [3] Murase, H. and Nayar, S. K.: Visual learning and recognition of 3-D objects from appearance, *Intl. J. of Computer Vision*, Vol. 14, No. 1, pp. 5–24 (1995), online.
- [4] Uenohara, M. and Kanade, T.: Optimal Approximation of Uniformly Rotated Images: Relationship Between Karhunen-Loeve Expansion and Discrete Cosine Transform, *IEEE Trans. IP*, Vol. 7, No. 1, pp. 116–119 (1998), online.
- [5] De la Torre, F.: Component Analysis for Computer Vision, *ECCV2006 Tutorial* (2006), online.
- [6] Park, R.-H.: Comments on "Optimal Approximation of Uniformly Rotated Images: Relationship Between Karhunen-Loève Expansion and Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. IP*, Vol. 11, No. 3, pp. 332–334 (2002), online.
- [7] Chang, C.-Y., Maciejewski, A. and Balakrishnan, V.: Fast Eigenspace Decomposition of Correlated Images, *IEEE Trans. IP*, Vol. 9, No. 9, pp. 1937–1949 (2000), online.
- [8] Jorgan, M., Žagar, E. and Leonardis, A.: Karhunen-Loève Expansion of a Set of Rotated Templates, *IEEE Trans. IP*, Vol. 12, No. 7, pp. 817–825 (2003), online.
- [9] Sengel, M. and Bischof, H.: Efficient representation of in-plane rotation within a PCA framework, *Image and Vision Computing*, Vol. 23, pp. 1051–1059 (2005), online.
- [10] Okatani, T. and Deguchi, K.: Yet Another Appearance-Based Method for Pose Estimation Based on a Linear Model, *IAPR Workshop on Machine Vision Applications 2000*, pp. 258–261 (2000).
- [11] 天野敏之, 玉木徹：Estimation-by-Completion: 3 次元物体の線形姿勢推定手法, MIRU2006 画像の認識・理解シンポジウム論文集, pp. 460–465 (2006), online.
- [12] 天野敏之, 玉木徹：EbC 画像対を用いた 3 次元物体の高速線形姿勢推定, 電子情報通信学会論文誌 D, p. in print (2007).
- [13] 天野敏之, 佐藤幸男：固有空間法を用いた BPLP による画像補間, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J85-D-II, No. 3, pp. 457–465 (2002), online.
- [14] 安藤慎吾, 草地良規, 鈴木章, 荒川賢一：サポートベクトル回帰を用いた三次元物体の姿勢推定法, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J89-D, No. 8, pp. 1840–1847 (2006), online.
- [15] 玉木徹, 天野敏之：マルチポート固有空間法, 部分空間法研究会 2006, pp. 7–15 (2006), online.
- [16] 玉木徹, 天野敏之, 金田和文：巡回群行列のブロック対角化を用いた回転物体画像の部分空間への投影とその応用, MIRU2007 画像の認識・理解シンポジウム論文集 (2007), online.
- [17] 玉木徹, 天野敏之, 金田和文：巡回群行列を用いた回転物体画像の複素部分空間への投影とその応用, MIRU2007 画像の認識・理解シンポジウム論文集 (2007), online.
- [18] Menke, W.: 離散インバース理論 — 逆問題とデータ解析, 古今書院 (1997), 柳谷 俊, 塚田 和彦 訳.
- [19] 佐武一郎：線形代数学, 裳華房 (1958).
- [20] Nene, S. A., Nayar, S. K. and Murase, H.: Columbia Object Image Library (COIL-20), Technical Report CUCS-005-96, Columbia University (1996), online.